



USO DEL MÉTODO DE INTEGRACIÓN *CLOSEST POINT PROJECTION METHOD* EN ANÁLISIS ELASTOPLÁSTICOS CON ENDURECIMIENTO CINEMÁTICO.

María Paz Duque Gutiérrez

mpazduque@aluno.unb.br

Estudante Doutorado Estruturas e Construção Civil, UNB

Campus Universitário Darcy Ribeiro, Prédio SG-12, CEP 70910-900, Brasília, DF, Brasil.

Professora Centro Universitário de Brasília, UniCEUB

William Taylor Matias Silva

taylor@unb.br

Professor Doutor Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, UNB

Campus Universitário Darcy Ribeiro, Prédio SG-12, CEP 70910-900, Brasília, DF, Brasil.

Resumen. *El objetivo de este trabajo es la implementación del método de integración Closest Point Projection Method, CPPM, bajo una cinemática de deformaciones infinitesimales. Se considera un material con propiedades elásticas constantes, se emplea el criterio de fluencia de von Mises y una regla asociativa de flujo para describir el comportamiento tensión - deformación del material. Es utilizada una ley de endurecimiento cinemático no lineal para definir la evolución de las deformaciones plásticas. Son presentados resultados numéricos para el cálculo incremental de las tensiones y de las variables internas, y son validados con resultados existentes en la literatura.*

Palabras Clave: *Plasticidad, Endurecimiento cinemático no lineal, Modelo de von Mises.*

1 INTRODUCCIÓN

Cuando se presentan respuestas no lineales en el comportamiento de los materiales, se hace necesario desenvolver e implementar diversos algoritmos para su tratamiento computacional. Al ser utilizado el método de los elementos finitos, la respuesta del material es considerada por medio de formulaciones incrementales, es decir, dado un incremento en las deformaciones $\Delta \epsilon$, el correspondiente incremento en las tensiones $\Delta \sigma$, debe ser calculado. El modelo de von Mises es ampliamente utilizado porque su aplicación resulta practica y simple. Una ley de endurecimiento isotrópico del criterio de fluencia resulta adecuada cuando las cargas son aplicadas monotónicamente, en el caso de aplicaciones cíclicas de carga se hace necesario un modelo más sofisticado, en este trabajo es aplicada una ley de endurecimiento cinemático no lineal.

En general, existe una clase de algoritmos ampliamente utilizada, conocida como algoritmos predictor elástico – corrector plástico. El método fue introducido por Wilkins (1964), siendo después desarrollado y aplicado por Simo & Taylor (1985). Esencialmente los cálculos son realizados en un proceso de dos pasos. En el primer paso, la respuesta inelástica del material se mantiene congelada, el incremento total es aplicado como si fuera puramente elástico, enseguida, es calculada una tensión elástica correspondiente, conocida como predictor elástico. En el segundo paso, si el comportamiento es elastoplástico, la tensión calculada es traída de vuelta a la superficie de fluencia, mediante la aplicación de una deformación inelástica adecuada. Este método equivale a encontrar la proyección más próxima del predictor elástico a la superficie de fluencia, por esta razón el método es referido como método de proyección al punto más próximo (*Closest Point Projection Method*, CPPM). Es implementado el método descrito por Anandarajah (2010). Ejemplos simples son presentados en el capítulo final para conferir la robustez del método.

2 ESTRUCTURA GENERAL DE LA TEORIA DE LA PLASTICIDAD

En la teoría de plasticidad, cuando son consideradas pequeñas deformaciones y para materiales cuya respuesta es independiente de la velocidad de deformación, el tensor de deformaciones totales en un punto es calculado como la suma de las deformaciones recuperables (elásticas) y las no recuperables (plásticas), lo anterior puede ser representado por la siguiente ecuación:

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (1)$$

En materiales con comportamiento elastoplástico la evolución de las tensiones no solo depende del incremento en la deformación, depende a su vez del comportamiento del material antes del paso de carga a que está siendo aplicado. Por lo tanto son adicionadas nuevas variables conocidas como variables internas ζ , que cuantifican el efecto del comportamiento anterior del material. Es decir:

$$\sigma = \sigma(\epsilon, \zeta) \quad (2)$$

Con relación a lo definido por las Ecs. (1) y (2) para modelar el comportamiento elastoplástico de un material, debe ser definida una superficie de fluencia ϕ que limita el tipo de respuesta del material, dado que el dominio dentro de la superficie es un dominio puramente elástico, el dominio fuera de la superficie no puede ser alcanzado por el material por lo que representa un comportamiento inaccesible y en la superficie es definido como un comportamiento elastoplástico. La función de fluencia debe ser definida matemáticamente tal que cuando se trata de un comportamiento elastoplástico, se cumpla la siguiente expresión:

$$\phi(\sigma, \zeta) = 0 \quad (3)$$

La superficie de fluencia debe cambiar su tamaño, forma o lugar de tal manera que cuando el comportamiento sea elastoplástico el estado de tensiones siempre cumpla con el criterio, lo que es representado por la siguiente ecuación:

$$\dot{\phi}(\sigma, \zeta) = 0 \quad (4)$$

Otro concepto fundamental en la teoría de plasticidad es la existencia de un vector normal a la superficie de fluencia en el estado actual de tensiones que determina la dirección del tensor de deformaciones, este es dado por:

$$\mathbf{r} = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \quad (5)$$

Para materiales donde el criterio de fluencia es afectado en el proceso de carga es necesaria la definición de una función de endurecimiento s que describa la evolución de las variables internas.

3 DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

Puesto que la relación entre las tensiones y las deformaciones es no lineal, es necesario transformar el problema continuo en uno discreto, esto se logra aplicando un esquema implícito *Backward Euler*. Para el caso de materiales con propiedades elásticas constantes, como el caso de los metales, el predictor elástico permanece constante dentro cada iteración. Conocidos los valores de tensiones y variables internas en un determinado paso de carga n , es decir conocidos σ_n y ζ_n , el objetivo de la implementación del método es encontrar los valores correspondientes al siguiente paso de carga, σ_{n+1} y ζ_{n+1} . El valor final de σ_{n+1} será la suma del tensor de prueba inicial, calculado a su vez como la suma del estado actual de tensiones y el predictor elástico, y el corrector plástico final.

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta\sigma^{ep} + \Delta\sigma^{pc} = \sigma_{n+1}^{tr} + \Delta\sigma^{pc} \quad (6)$$

El tensor de prueba es calculado como si el incremento en las tensiones fuera puramente elástico, así el predictor elástico es calculado como:

$$\Delta \sigma^{ep} = \mathbf{C} \Delta \epsilon \quad (7)$$

Donde \mathbf{C} es el tensor constitutivo del modelo en la fase elástica. El corrector plástico trae de vuelta el tensor de prueba hacia la superficie de fluencia, y es calculado por:

$$\Delta \sigma^{pc} = -\Delta \lambda \mathbf{C} \mathbf{r}^{n+1} \quad (8)$$

El tensor de variables internas actualizado es definido como su valor anterior adicionando un incremento que depende del valor final del multiplicador plástico y del valor de la función de endurecimiento en el estado actual:

$$\zeta_{n+1} = \zeta_n + \Delta \zeta, \quad \Delta \zeta = \Delta \lambda s^{n+1} \quad (9)$$

Los valores finales de tensiones y variables internas deben ser tales que:

$$\varphi^{n+1}(\sigma_{n+1}, \zeta_{n+1}) = 0 \quad (10)$$

El proceso de integración consiste entonces en aplicar un incremento elástico en las tensiones dado un incremento en el tensor de deformaciones y mediante un esquema iterativo calcular el tensor corrector hasta satisfacer el criterio de fluencia. Para el modelo de von Mises el tensor constitutivo es calculado mediante la siguiente expresión:

$$C_{ijkl} = \left(K - \frac{2}{3} G \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (11)$$

El tensor δ_{ij} es conocido como operador Delta de kronecker. Es utilizado el tensor de prueba para una primera estimativa del valor de las tensiones y variables internas, es decir:

$$\sigma_{n+1}^1 = \sigma_{n+1}^{tr} - \Delta \lambda \mathbf{C} \mathbf{r}^{tr} \quad (12a)$$

$$\zeta_{n+1}^1 = \zeta_n + \Delta \lambda s^{tr} \quad (12b)$$

Donde

$$\mathbf{r}^{tr} = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{n+1}^{tr}} \quad (13)$$

Para modelos simples (como el modelo de von Mises con reglas simples de endurecimiento), es posible combinar las ecuaciones anteriores en una simple ecuación escalar en $\Delta \lambda$, resolviendo esta ecuación y encontrar los valores de tensiones y de variables internas en el incremento $n+1$. Este es el caso para endurecimiento cinemático no lineal cuando las ecuaciones son basadas en el campo de tensiones desviadoras. Una estimativa inicial de $\Delta \lambda$ puede ser:

$$\Delta\lambda_1 = \frac{\varphi^{tr}}{[\mathbf{r}^T \mathbf{C} \mathbf{r} + K_p]^{tr}} \quad (14)$$

Como fue verificado antes de comenzar el proceso iterativo de que el tensor de prueba no cumple el criterio de fluencia, es decir $\varphi > 0$, son definidos las siguientes ecuaciones residuales:

$$\mathbf{R}_\sigma = \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - [\boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \lambda \mathbf{C} \mathbf{r}^{n+1}] = \mathbf{R}_\sigma(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\zeta}_{n+1}, \Delta \lambda) \quad (15a)$$

$$\mathbf{R}_\zeta = \boldsymbol{\zeta}_{n+1} - [\boldsymbol{\zeta}_n + \Delta \lambda \mathbf{s}^{n+1}] = \mathbf{R}_\zeta(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\zeta}_{n+1}, \Delta \lambda) \quad (15b)$$

$$R_\varphi = \varphi^{n+1}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\zeta}_{n+1}) \quad (15c)$$

Durante la primera iteración los residuales son calculados utilizando $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^1$, $\boldsymbol{\zeta}_{n+1}^1$ y $\Delta \lambda_1$ para $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ y $\boldsymbol{\zeta}_{n+1}$. Esto requiere el cálculo de \mathbf{r}^{n+1} en el estado $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^1$ y $\boldsymbol{\zeta}_{n+1}^1$. Ahora las ecuaciones residuales son linealizadas en torno a $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^1$ y $\boldsymbol{\zeta}_{n+1}^1$.

$$R^1_{\sigma_{ij}} + \left[\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \sigma_{kl}} \right]_1 \partial \sigma_{kl} + \left[\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \zeta_{kl}} \right]_1 \partial \zeta_{kl} + \left[\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta \lambda} \right]_1 \partial \Delta \lambda = 0 \quad (16a)$$

$$R^1_{\zeta_{kl}} + \left[\frac{\partial R_{\zeta_{kl}}}{\partial \sigma_{kl}} \right]_1 \partial \sigma_{kl} + \left[\frac{\partial R_{\zeta_{kl}}}{\partial \zeta_{kl}} \right]_1 \partial \zeta_{kl} + \left[\frac{\partial R_{\zeta_{kl}}}{\partial \Delta \lambda} \right]_1 \partial \Delta \lambda = 0 \quad (16b)$$

$$R^1_\varphi + \left[\frac{\partial R_\varphi}{\partial \sigma_{kl}} \right]_1 \partial \sigma_{kl} + \left[\frac{\partial R_\varphi}{\partial \zeta_{kl}} \right]_1 \partial \zeta_{kl} = 0 \quad (16c)$$

Escribiendo las ecuaciones residuales en notación tensorial tenemos que:

$$R_{\sigma_{ij}} = \sigma_{ij}^{n+1} - \sigma_{ij}^n - C_{ijpq} \Delta \varepsilon_{pq} + \Delta \lambda C_{ijpq} r_{pq}^{n+1} \quad (17a)$$

$$R_{\zeta_{ij}} = \zeta_{ij_{n+1}} - \zeta_{ij_n} - \Delta \lambda s_{ij}^{n+1} \quad (17b)$$

$$R_\varphi = \varphi^{n+1}(\sigma_{ij}^{n+1}, \zeta_{ij_{n+1}}) \quad (17c)$$

Los coeficientes en las Ecs. (16) son derivados a seguir. Representan valores numéricos pues son evaluados en $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^1$ y $\boldsymbol{\zeta}_{n+1}^1$. El subíndice 1 se suprimido para simplificar la notación.

$$\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \sigma_{kl}} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{\partial C_{ijpq}}{\partial \sigma_{kl}} [\Delta \varepsilon_{pq} - \Delta \lambda r_{pq}^{n+1}] + \Delta \lambda C_{ijpq} \frac{\partial r_{pq}^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} \quad (18a)$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \zeta_{kl}} = \Delta \lambda C_{ijpq} \frac{\partial r_{pq}^{n+1}}{\partial \zeta_{kl}} \quad (18b)$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta \lambda} = C_{ijpq} r_{pq}^{n+1} \quad (18c)$$

$$\frac{\partial R_{\zeta_{ij}}}{\partial \sigma_{kl}} = -\Delta \lambda \frac{\partial s_{ij}^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} \quad (18d)$$

$$\frac{\partial R_{\zeta_{ij}}}{\partial \zeta_{kl}} = 1 - \Delta \lambda \frac{\partial s_{ij}^{n+1}}{\partial \zeta_{kl}} \quad (18e)$$

$$\frac{\partial R_{\zeta_{ij}}}{\partial \Delta \lambda} = -s_{ij}^{n+1} - \Delta \lambda \frac{\partial s_{ij}^{n+1}}{\partial \Delta \lambda} \quad (18f)$$

$$\frac{\partial R_{\varphi}}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial \varphi^{n+1}}{\partial \sigma_{kl}} = r_{kl}^{n+1} \quad (18g)$$

$$\frac{\partial R_{\varphi}}{\partial \zeta_{kl}} = \frac{\partial \varphi^{n+1}}{\partial \zeta_{kl}} \quad (18h)$$

Para el cálculo de los anteriores coeficientes son necesarias las siguientes cantidades: Valores de \mathbf{C} , \mathbf{r} , $\partial \varphi / \partial \zeta$, $\Delta \lambda$ y \mathbf{s} en el punto $n+1$ en la iteración actual. Gradientes $\partial \mathbf{C} / \partial \boldsymbol{\sigma}$, $\partial \mathbf{r} / \partial \boldsymbol{\sigma}$, $\partial \mathbf{r} / \partial \zeta$, $\partial \mathbf{s} / \partial \boldsymbol{\sigma}$, $\partial \mathbf{s} / \partial \zeta$, $\partial \mathbf{s} / \partial \Delta \lambda$. Las Ecs. (16) son solucionadas simultáneamente para encontrar las tres incógnitas, $\delta \sigma_{ij}$, $\delta \zeta_{ij}$, y $\delta \Delta \lambda$. Los nuevos valores estimados son calculados como:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^2 = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^1 + \delta \boldsymbol{\sigma} \quad (19a)$$

$$\boldsymbol{\zeta}_{n+1}^2 = \boldsymbol{\zeta}_{n+1}^1 + \delta \boldsymbol{\zeta} \quad (19b)$$

$$\Delta \lambda^2 = \Delta \lambda^1 + \delta \Delta \lambda \quad (19c)$$

Son evaluados de nuevo los residuales definidos en las Ecs. (15). Probablemente los valores obtenidos para los residuales no sean lo suficientemente pequeños, el procedimiento

es repetido usando ahora los valores actualizados, o sea σ_{n+1}^2 , ζ_{n+1}^2 y $\Delta\lambda^2$. El corrector plástico $\Delta\sigma^{pc}$ gradualmente converge al valor correcto dentro de la tolerancia adoptada. Es utilizado el siguiente criterio de convergencia:

$$e_\sigma = \|R_\sigma^{i+1}\|/\|\sigma_{n+1}^i\| \leq TOL \quad (20a)$$

$$e_\zeta = \|R_\zeta^{i+1}\|/\|\zeta_{n+1}^i\| \leq TOL \quad (20b)$$

$$R_\varphi^{i+1} = \varphi^{i+1} \leq TOL \quad (20c)$$

4 INTEGRACIÓN DEL MODELO DE VON MISES

El criterio de von Mises asume que la fluencia ocurre cuando el invariante de tensiones desviadoras excede cierto valor que depende de las tensiones desviadoras. Es utilizada una regla de endurecimiento cinemático, mientras en modelos con endurecimiento isotrópico la superficie de fluencia se expande uniformemente en todas las direcciones en el espacio de tensiones sin sufrir cambios en su forma o en su centro, para el caso de endurecimiento cinemático el centro de la superficie cambia en el proceso de carga, sin embargo su centro y tamaño permanecen iguales. Generalmente el comportamiento es modelado introduciendo una variable interna tensorial conocida como *back stress* y, definiendo una regla de evolución adecuada para este tensor. En modelos como el de von Mises donde el criterio de fluencia es independiente de la presión hidrostática, el tensor *back stress* también es independiente de la presión hidrostática. El modelo es ampliamente utilizado en plasticidad independiente de la tasa y para reglas de flujo asociativas. La regla de endurecimiento es no lineal y en este trabajo es aplicada en el campo de tensiones desviadoras. La relación tensión-deformación es dada por:

$$\dot{\sigma} = C\dot{\epsilon}^e \quad (21)$$

Donde:

$$C_{ijkl} = \left(K - \frac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (22)$$

G es el módulo de cortante y K el módulo de *bulk*. C es el operador tangente elástico continuo, $\dot{\sigma}$ es la tasa del tensor de tensiones, y $\dot{\epsilon}^e$ es la tasa de la deformación elástica. Los dos primeros invariantes, I y J, del tensor de tensiones, son definidos como:

$$I = \sigma_{kl}\delta_{kl} \quad (23a)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}I\delta_{ij} \quad (23b)$$

$$J = \left(\frac{1}{2} s_{kl}s_{kl} \right)^{1/2} \quad (23c)$$

La superficie de fluencia es asumida siendo un círculo con respecto a un punto en el plano octaédrico, representado por el tensor α y es dada por:

$$\varphi(s, \alpha) = (s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij}) - \frac{2}{3}k^2 = 0 \quad (24)$$

Donde la variable k es asumida constante en el modelo y geoméricamente representa el tamaño de la superficie de fluencia. Entonces la variable interna del modelo es el tensor *back stress* α :

$$\zeta \equiv \alpha \quad (25)$$

Asumiendo una regla de flujo asociativa las ecuaciones involucradas en las relaciones constitutivas plásticas son:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda}r; r = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}; \dot{\lambda} = \frac{1}{K_p} r \dot{\sigma} \quad (26)$$

Donde $\dot{\epsilon}^p$ es la tasa de la deformación plástica, $\dot{\lambda}$ es el índice de carga y K_p es conocido como modulo plástico. Es derivada la función de fluencia para obtener el tensor de flujo plástico:

$$r_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \varphi}{\partial s_{kl}} \frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = 2(s_{kl} - \alpha_{kl}) \left(\delta_{ki}\delta_{lj} - \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{ij} \right) = 2(s_{ij} - \alpha_{ij}) = 2b_{ij} \quad (27a)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_{ij}} = -2b_{ij} \quad (27b)$$

$$b_{ij} = (s_{ij} - \alpha_{ij}) \quad (27c)$$

El comportamiento de la ley de endurecimiento cinemático es modelada usando la regla de Armstrong-Frederick (Armstrong-Frederick, 1966) dada por la siguiente expresión:

$$\dot{\alpha}_{ij} = \frac{2}{3} c \dot{\epsilon}_{ij}^p - \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma \alpha_{ij} \dot{\xi}^p \quad (28)$$

Donde $\dot{\xi}^p$ representa la longitud de la trayectoria en el espacio de deformaciones plásticas desviadoras, y es definida por:

$$\dot{\xi}^p = \left[\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p \right] \quad (29)$$

Siendo $\dot{\epsilon}_{ij}$ la tasa de cambio del tensor de deformaciones desviadoras;

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (30)$$

De la Ec. (26) se tiene que:

$$\dot{\xi}^p = \left[\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p \right] = \left[\frac{1}{2} r_{ij}^d r_{ij}^d \right]^{1/2} \dot{\lambda} = \bar{r}^d \dot{\lambda} \quad (31)$$

$$\bar{r}^d = \left[\frac{1}{2} r_{ij}^d r_{ij}^d \right]^{1/2} \quad (32)$$

Donde r_{ij}^d es la parte desviadora de r_{ij} , y puede ser calculado como:

$$r_{ij}^d = r_{ij} - \frac{1}{3} r_{pp} \delta_{ij} \quad (33)$$

Reemplazando las ecuaciones anteriores en el criterio de fluencia, se puede llegar a:

$$\bar{r}^d = \frac{2}{\sqrt{3}} k \quad (34)$$

La Ec. (28) puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\dot{\alpha}_{ij} = \dot{\lambda} \bar{s}_{ij} \quad (35)$$

Donde el tensor \bar{s}_{ij} es definido como:

$$\bar{s}_{ij} = \frac{2}{3} c r_{ij} - \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma \alpha_{ij} \bar{r}^d = \frac{4}{3} c b_{ij} - \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma \alpha_{ij} \bar{r}^d \quad (36)$$

Los parámetros c y γ dependen del modelo utilizado. Utilizando la condición de consistencia de la superficie de fluencia, matemáticamente expresada por la Ec. (4), se puede llegar a:

$$K_p = \frac{8}{9} k(2ck - 3\gamma ka) \quad (37)$$

Donde:

$$a = (s_{kl} - \alpha_{kl})\alpha_{kl} \quad (38)$$

Utilizando las ecuaciones anteriores y dado que el tensor de flujo plástico es puramente desviador, ($r_{pp} = 0$), se tiene que:

$$C_{ijkl}r_{kl} = 4G(s_{ij} - \alpha_{ij}) = 4Gb_{ij} \quad (39)$$

4.1 Aplicación del método CPPM al modelo de von Mises con endurecimiento cinemático.

Las ecuaciones de Euler para tensiones pueden ser descompuestas en partes esférica y desviadora, así:

$$p_{n+1} = p_n + K\Delta\varepsilon_{pp} \quad (40)$$

$$s_{n+1} = s_n + 2G\Delta e - 2G\Delta\lambda r_{n+1} = s^{tr} - 2G\Delta\lambda r_{n+1} \quad (41)$$

Donde $p_{n+1} = \sigma_{kk}$ es la parte esférica de σ_{n+1} , $s_{n+1} = \sigma_{n+1} - p_{n+1}\delta$ es la parte desviadora de σ_{n+1} y $\Delta e = \Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon_{pp}\delta/3$ es el incremento desviador de la deformación. En modelos independientes de la presión como el modelo de von Mises considerado en este trabajo, $r_{pp}^{n+1} = 0$, la variación de p es puramente elástica. Por lo tanto, solo es necesario incluir la ecuación desviadora en el proceso iterativo. La ecuación *backward Euler* para el tensor *back stress* es:

$$\alpha_{ij}^{n+1} = \alpha_{ij}^n + \frac{2}{3}c\Delta\lambda r_{ij}^{n+1} - \frac{2}{\sqrt{3}}\gamma\Delta\lambda \bar{r}^d \alpha_{ij}^{n+1} \quad (42)$$

El método puede ser simplificado a una simple ecuación escalar en $\Delta\lambda$, resultando en un proceso computacionalmente muy eficiente. Haciendo uso de las Ecs. (27) y (34), las Ecs. (41) y (42) son expresadas como:

$$\begin{aligned}\alpha_{ij}^{n+1} &= \alpha_{ij}^n + \frac{4}{3}c\Delta\lambda(s_{ij}^{n+1} - \alpha_{ij}^{n+1}) - \frac{2}{\sqrt{3}}\gamma\Delta\lambda\left(\frac{2}{\sqrt{3}}k\right)\alpha_{ij}^{n+1} \\ &= \frac{1}{y_0}\left[\alpha_{ij}^n + \frac{4c\Delta\lambda}{3}s_{ij}^{n+1}\right]\end{aligned}\quad (43)$$

$$\begin{aligned}s_{ij}^{n+1} &= s_{ij}^{tr} - 4G\Delta\lambda(s_{ij}^{n+1} - \alpha_{ij}^{n+1}) \\ &= s_{ij}^{tr} - 4G\Delta\lambda s_{ij}^{n+1} + \frac{4G\Delta\lambda}{y_0}\left[\alpha_{ij}^n + \frac{4c\Delta\lambda}{3}s_{ij}^{n+1}\right] \\ &= \frac{1}{x_0}\left[s_{ij}^{tr} + \frac{4G\Delta\lambda}{y_0}\alpha_{ij}^n\right]\end{aligned}\quad (44)$$

Donde:

$$y_0 = 1 + \frac{4c\Delta\lambda}{3} + \frac{4k\gamma\Delta\lambda}{3}\quad (45)$$

$$x_0 = 1 + 4G\Delta\lambda - \frac{16}{3}\frac{Gc\Delta\lambda^2}{y_0}\quad (46)$$

Utilizando las ecuaciones anteriores, la Ec. (27) puede ser expresada como:

$$\begin{aligned}b_{ij}^{n+1} &= (s_{ij}^{n+1} - \alpha_{ij}^{n+1}) = s_{ij}^{n+1} - \frac{1}{y_0}\left[\alpha_{ij}^n + \frac{4c\Delta\lambda}{3}s_{ij}^{n+1}\right] \\ &= \left[1 - \frac{4c\Delta\lambda}{3y_0}\right]s_{ij}^{n+1} - \frac{1}{y_0}\alpha_{ij}^n \\ &= \frac{1}{x_0}\left[s_{ij}^{tr} + \frac{4G\Delta\lambda}{y_0}\alpha_{ij}^n\right]\left[1 - \frac{4c\Delta\lambda}{3y_0}\right] - \frac{1}{y_0}\alpha_{ij}^n\end{aligned}\quad (47)$$

$$= a_1 s_{ij}^{tr} + a_2 \alpha_{ij}^n$$

Donde:

$$a_1 = \frac{1}{x_0}\left[1 - \frac{4c\Delta\lambda}{3y_0}\right]\quad (48a)$$

$$a_2 = \frac{4G\Delta\lambda}{x_0 y_0}\left[1 - \frac{4c\Delta\lambda}{3y_0}\right] - \frac{1}{y_0}\quad (48b)$$

Finalmente reemplazando las ecuaciones anteriores en el criterio de fluencia, se puede llegar a:

$$\begin{aligned}\varphi &= b_{ij}^{n+1} b_{ij}^{n+1} - \frac{2}{3} k^2 = 0 \\ \varphi &= (a_1 s_{ij}^{tr} + a_2 \alpha_{ij}^n)(a_1 s_{ij}^{tr} + a_2 \alpha_{ij}^n) - \frac{2}{3} k^2 = 0 \\ \varphi &= 2a_1^2 J_{tr}^2 + 2a_2^2 J_{\alpha}^2 + 2a_1 a_2 J_{\alpha s} - \frac{2}{3} k^2 = 0\end{aligned}\tag{49}$$

Donde:

$$J_{tr} = \left(\frac{1}{2} s_{ij}^{tr} s_{ij}^{tr} \right)^{1/2}; \quad J_{\alpha} = \left(\frac{1}{2} \alpha_{ij}^n \alpha_{ij}^n \right)^{1/2}; \quad J_{\alpha s} = s_{ij}^{tr} \alpha_{ij}^n\tag{50}$$

Las cantidades de las Ecs. (50) dependen únicamente de los valores en el paso de carga n , los cuales son conocidos. Así, la Ec. (49) depende únicamente del multiplicador plástico, por lo que es una ecuación no lineal en $\Delta\lambda$, que puede ser solucionada por algún método conveniente, como el método de Newton. Una vez $\Delta\lambda$ es calculado, es utilizado para calcular α_{ij}^{n+1} y s_{ij}^{n+1} usando las Ecs. (43) y (44) respectivamente.

5 EJEMPLOS NUMÉRICOS

En esta sección, utilizando el método de proyección al punto más próximo CPPM, son obtenidas las relaciones tensión-deformación para un ciclo de carga. El método representa satisfactoriamente las variables internas para una carga cíclica. Los parámetros del modelo están listados en la Tabla 1, según Armstrong-Frederick (1966) para un elemento sobre carga uniaxial la tensión de ruptura es dada por:

$$\sigma_f = k + \frac{c}{\gamma}\tag{51}$$

Tabla 1. Propiedades mecánicas

E (GPa)	V	k (GPa)	c (GPa)	γ	σ_f (GPa)
200	0.3	0.1	30	100	0.4
200	0.3	0.1	3	10	0.4

En la Ilustración 1 puede ser observado el comportamiento aplicando incrementos uniaxiales en el tensor de deformación. Como esperado para los dos modelos implementados, la tensión de ruptura alcanzada es el mismo valor al utilizar la Ec. (51). Es observado también

que cuanto mayor es el parámetro γ el comportamiento es más rígido. De modo similar, en la Ilustración 2 es observada la trayectoria tensión – deformación para un elemento sometido en este caso a una carga cíclica de carga y descarga para los dos modelos de la Tabla 1. Mediante el uso de la regla de endurecimiento no lineal pueden ser simulados modelos histeréticos.

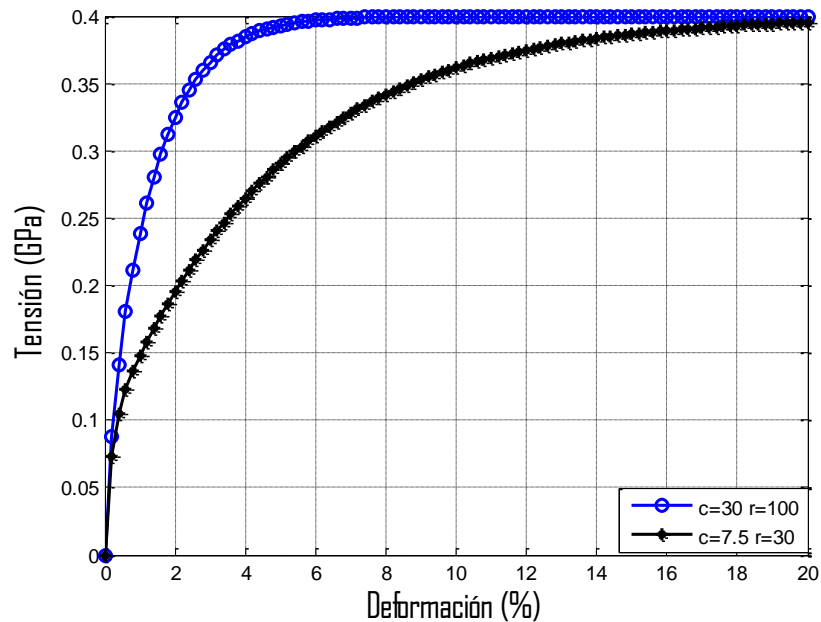


Ilustración 1. Comportamiento de un elemento sometido a carga uniaxial

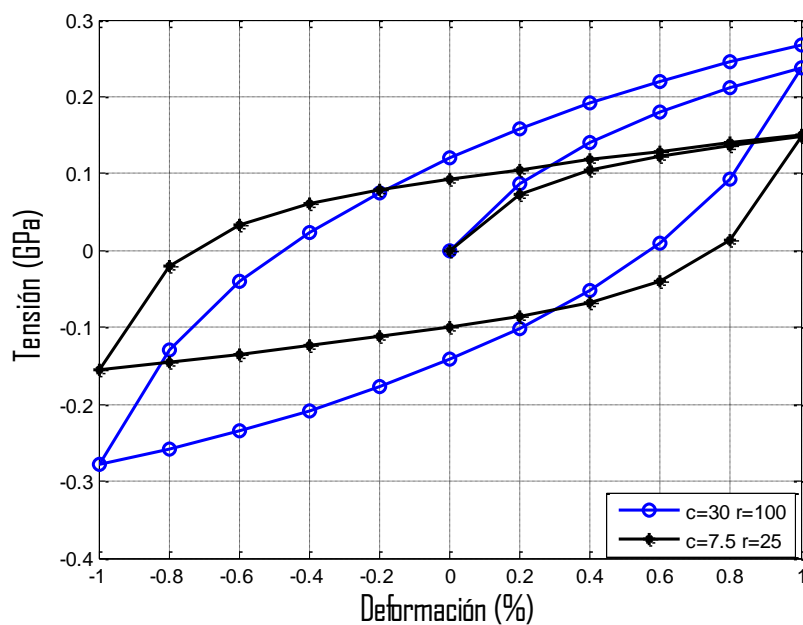


Ilustración 2. Comportamiento de un elemento sometido a carga cíclica

CONCLUSIONES

En este trabajo fue presentado el modelo constitutivo de von Mises para un problema con solo un elemento y la formulación analítica para su integración empleando una ley de endurecimiento cinemático no lineal de la función de fluencia. La rutina resultante de este trabajo presenta un comportamiento robusto en términos de implementación numérica y económica computacionalmente, que será implementado posteriormente en análisis con elementos finitos.

El método CPPM está basado en el esquema iterativo de Newton y sufre los inconvenientes inherentes del método. Por ejemplo, el método converge solo cuando la estimación inicial está cerca de la solución. Esto varía dependiendo del grado de no linealidad de la regla de endurecimiento, del criterio de endurecimiento, entre otros. Puede existir entonces no convergencia en diferentes casos: Cuando el tensor de tensiones de prueba está muy alejado de la solución, por ejemplo en modelos que combinan endurecimiento y ablandamiento. En algunos casos, el cambio en variables internas durante iteraciones a nivel local puede ser muy grande, resultando en divergencia. Pueden aparecer también dificultades de convergencia cuando la solución final cae cerca de “esquinas” en las superficies de fluencia o de potencial plástico. La satisfacción de la condición de consistencia de la función de fluencia mejora la precisión del método. Así, la precisión del método depende del tamaño de cada incremento.

REFERENCIAS

- Anandarajah, A.2010. *Computational Methods in Elasticity and Plasticity*, pp. 375-412. Springer New York.
- Armstrong, P.J., & Frederick, C.O. 1966. A mathematical representation of the multiaxialBauschinger effect. G.E.G.B. Report RD|B|N 731.
- Simo, J.C., Taylor, R.L. 1985. Consistent tangent operators for rate-independent elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp.101-118.
- Wilkins, M.L. 1964. Calculation of elasto-plastic flow. In *Methods of Computational Physics* 3, Academic, New York.